Über die graphische Parabel-Methode.

Von Leander Ditscheiner.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgetragen in der Sitzung am 15. October 1857.)

Drei graphische Methoden der Krystallographie sind bereits bekannt. Es sind dies die Neumann'sche „graphische Linien-Methode" (siehe Neumann's Beiträge zur Krystallonomie, Berlin und Posen 1823), die „graphische Punkt-Methode" Quenstedt's (siehe Quenstedt's Methode der Krystallographie, Stuttgart 1840) und die „graphische Kreis-Methode", welche letztere ich im Juli d. J. die Ehre hatte der hochverehrten mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen, welche sie auch zum Abdruck in ihre Sitzungsberichte bestimmt hat.

Eine vierte Methode, die „graphische Ellipsen-Methode" kann ebenfalls als schon bekannt angesehen werden. Bei ihr sind die Flächen repräsentirt durch Punkte, die Flächenorte sind also Punkte, die Zone aber ist dargestellt durch eine Ellipse, die alle jene Flächenorte verbindet, deren Flächen einer Zone angehören. Wenn man durch den Mittelpunkt des Krystallaxen-Systems auf alle Flächen eines Krystallsystems senkrechte Linien zieht, und den Durchschnitt aller dieser Linien mit einer Kugel, vom Radius $= 1$ (und deren Mittelpunkt auch mit dem Mittelpunkte unseres Krystallaxen-Systems zusammenfällt) sucht, und alle diese Durchschnittspunkte nach den Regeln der darstellenden Geometrie auf die gerade Endfläche $P - \infty$ projicirt, so hat man das Bild dieses Systemes nach der graphischen Ellipsen-Methode entworfen. Da auf der Kugel alle Durchschnittspunkte, die Flächen einer Zone angehören, bekanntlich in grössten Kreisen liegen, so müssen auch ihre Projectionen in Ellipsen liegen, deren Mittelpunkt mit der Projection unseres Krystallaxen-Systems

oder mit den Flächenorten von $P - \infty$ zusammenstellen. Die Zonenlinie geht auch in eine Kreislinie von Radius = 1 über, dann stellt sie jene Zone dar, in welcher alle verticalen Prismen liegen. Jene Flächen, welche horizontale Combinationslinien mit einander hervorbringen, liegen in Zonen, deren Zonenlinien gerade, durch den Mittelpunkt des Schemas gehende Linien sind.

Die folgenden Zeilen sollen aber eine andere, eine fünfte, graphische Methode behandeln, bei welcher die Fläche repräsentirt ist durch eine gerade Linie, wo also der Flächenort wie bei der Quenstedt'schen graphischen Punkt-Methode eine gerade Linie ist, die Zone aber, zum Unterschiede von dieser, repräsentirt ist durch eine Parabel, an welche alle Flächenorte, die einer und derselben Zone angehören, tangiren. Der Brennpunkt der hierher gehörigen Parabel liegt immer in dem Mittelpunkt unseres Axensystems, oder wenn die Axen des Krystallsystems schiefwinklig sind, in irgend einem andern bestimmten Punkt, der von den Abmessungen der Grundgestalt abhängig ist, so dass alle Zonenlinien einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Diese graphische Methode heisst desshalb auch die „graphische Parabel-Methode" und soll in den folgenden Zeilen ausführlicher behandelt werden.

Über eine „graphische Hyperbel-Methode" hoffe ich in Bälde berichten zu können. Bei ihr verbindet eine Hyperbel alle Flächenorte einer Zone.

§. 1.

Es handelt sich nun wieder vorerst um den Begriff und die Bestimmung des Flächenortes, welchen wir im Folgenden beibehalten wollen. Wir denken uns zu diesem Behufe zur Krystallfläche, deren Flächenort bestimmt werden soll, eine parallele Ebene durch den Mittelpunkt O, Fig. 1 des Axensystems gelegt, wodurch man die Fläche OCB erhält. Ferner denke man sich auf die Axe OZ nach abwärts die Länge $OO' = 1$ und durch den nun so erhaltenen Punkt O' auf die Krystallfläche OBC eine senkrechte Ebene so gelegt, dass sie parallel mit CB geht. Man erhält dadurch die Fläche $O'B'C'$, welche Ebene die Ebene xy nach der Linie $B'C'$ schneidet, welche offenbar mit der BC parallel ist. Die Gerade $B'C'$ ist nun der gesuchte Flächenort von OBC.

Wenn man $O\,M'$ parallel mit $O\,M'$ zieht, so steht offenbar $O'\,M'$ auf der Ebene $O\,B\,C$ senkrecht; es ist somit M' nichts anderes als der Flächenort nach der Neumann'schen graphischen Linien-Methode, und es steht also auch $O'\,M'$ auf der $M\,O$ senkrecht.

Es folgt somit die folgende einfache Regel für die Bestimmung des Flächenortes nach dieser graphischen Parabel-Methode: Man verbinde den Flächenort der Neumann'schen graphischen Linien-Methode mit dem Mittelpunkt des Coordinatensystems und zieht durch den genannten Flächenort eine senkrechte Linie auf diese Verbindungslinie, die so erhaltene Linie ist der gesuchte Flächenort.

Wir gehen nun sogleich auf die Bestimmung der Grössen $P\,B'$ und OC' über, um auch den Flächenort unabhängig von dem Flächenort der graphischen Linien-Methode bestimmen zu können. Die Flächen, deren Flächenort bestimmt werden soll, sei also gegeben durch ihr Axenverhältniss $a_1 : b_1 : c_1 = 1 : mb : nc$, so sind dann offenbar die Coordinaten des Punktes M' folgende:

$$O\,E = \frac{1}{mb} \quad \text{und} \quad O\,F = \frac{1}{nc}$$

hiernach ergibt sich die Gleichung der Geraden OM' als:

$$y = \frac{mb}{nc}\,x. \tag{1}$$

Die Gleichung irgend einer durch M' gehenden Geraden ist aber:

$$y - O\,F = a\,(x - O\,E) \tag{2}$$

und da $B'\,C'$, deren Gleichung bestimmt werden soll, auf OM' Gl. 1 senkrecht steht, so ist unser obiges a offenbar

$$a = \frac{nc}{mb}$$

und dieser Werth in die obige Gleichung 2 gesetzt, folgt die Gleichung von BC:

$$y - \frac{1}{nc} = \frac{nc}{mb}\left(x - \frac{1}{mb}\right)$$

oder diese, auf die gewöhnliche Form einer Gleichung, $y = ax + b$, gebracht, ist:

$$y = \frac{nc}{mb} x - \left(\frac{1}{mb} - \frac{1}{nc}\right). \tag{3}$$

Man erhält nun leicht die Werthe für die Grössen OB' und OC', wenn man im ersten Falle $y = O$ und x bestimmt und im zweiten Falle $x = O$ setzt und y bestimmt. Man erhält sonach durch eine leichte Rechnung die beiden folgenden Werthe:

$$OB' = \frac{nc - mb}{n^2 c^2}$$

$$OC' = - \frac{nc - mb}{nmbc}.$$

Mittelst dieser Gleichungen ist man nun auch leicht im Stande die Flächenorte aller Flächen sogleich in das Schema einzutragen.

§. 2.

Wir kommen nun dahin, zu untersuchen, wie sich die Flächenorte einer Zone in diesem Schema zu einander verhalten, d. i. wir wollen nun die Zonenlinie der graphischen Parabel-Methode bestimmen.

Wir werden hier am zweckmässigsten zum Ziele gelangen, wenn wir die erstere der im vorigen Paragraphe gegebenen Bestimmungsmethoden in Anspruch nehmen. Wir erhalten also die Flächenorte aller in einer Zone liegenden Flächen, wenn wir die Zonenlinie ziehen, welche sich nach der graphischen Linien-Methode ergibt, sie sei mn, Fig. 2, und jeden Punkt dieser Zonenlinie mit O verbinden und auf diese Verbindungslinie eine senkrechte Linie durch den betreffenden Punkt der Neumann'schen Zonenlinie ziehen. Man erhält dadurch eine Reihe von Flächenorten $B'\,C'$; $B''\,C''$; $B'''\,C'''$; $B''''\,C''''$ ... und $m\,n$ selbst, welche durch die Punkte M, M', M'', M''', M'''' ... gehen und senkrecht stehen auf den Geraden OM ; OM' ; OM'' ; OM''' ; OM'''' ... Man ersieht nun leicht, dass alle diese Flächenorte einer Zone Tangenten sind an eine gewisse Curve $M\,S'\,S''$ .., welche also auch nichts anderes als unsere Zonenlinie ist. Unsere Aufgabe geht also dahin, die Form und die Gleichung dieser Zonenlinie zu bestimmen.

Wir wollen nun vorerst die Form dieser Zonenlinie näher ins Auge fassen und zu diesem Behufe die Zonenlinie nicht auf unser

früheres Axensystem Oxy, sondern auf ein neues Axensystem beziehen, welches $Mx'y'$ ist, in welchen die Neumann'sche Zonenlinie mn, die Axe der y' und die durch O auf diese Zonenlinie senkrecht gezogene OM die neue Axe der x' ist.

Es sei also Fig. 3 dieses neue Axensystem, in welchem M der Coordinaten-Mittelpunkt und $OM = \mu$ ist, so erhalten wir also irgend einen Flächenort, wenn wir O mit M verbinden und $C'M'B'$ senkrecht auf diese Verbindungslinie ziehen. Dieses mehrmals gethan, erhalten wir auch hier wieder die schon oben angeführte Curve $MS'S''S'''$ ... deren Gleichung bestimmt werden soll.

Wir wollen nun das eben Angeführte auch analytisch ausdrücken. Es seien die Coordinaten des Punktes O folgende:

$$x' = \mu \; ; \; y' = 0$$

und jene des Punktes M'':

$$x'' = 0 \; ; \; y'' = y'',$$

folglich hat die durch O und M'' gehende Gerade die Gleichung:

$$y = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}} x + \frac{y_{,,}x_{,} - x_{,,}y_{,}}{x_{,} - x_{,,}}$$

oder wenn man die obigen Coordinaten in diese Gleichung substituirt, erhält man die Gleichung:

$$y = - \frac{y_{,,}}{\mu} x$$

und die durch M' auf diese Gleichung senkrecht stehende Linie hat die Gleichung:

$$y = \frac{\mu}{y_{,,}} x + y''. \qquad \text{(Gl. 1)}$$

Die Gleichung einer Tangente aber, die durch den Punkt:

$$M'' \; ; \; x'' = 0 \; , \; y'' = y$$

an die Parabel:

$$y^2 = Ax$$

gezogen wird, hat nach den Regeln der analytischen Geometrie der Ebene die Gleichung:

$$y = \frac{A}{4y_{,,}} x + y_{,,}. \qquad \text{(Gl. 2)}$$

Man erkennt aber auf den ersten Augenblick die Übereinstimmung der beiden Gleichungen 1 und 2, es ist also die Gleichung 1, die Gleichung einer Tangente an eine Parabel. Es folgt hieraus die Regel: Die Zonenlinie ist eine Parabel, deren Brennpunkt im Mittelpunkt O unseres Coordinaten-Systems liegt, deren Parameter gleich der vierfachen Entfernung des Coordinaten-Mittelpunktes O von der Neumann'schen Zonenlinie und deren Axenrichtung mit der Richtung der vom Coordinaten-Mittepunkte O auf die Neumann'scheZonenlinie gezogenen senkrechtenLinie, der Lage sowohl als der Richtung nach, zusammenfällt.

§. 3.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass unsere Zonenlinie der Form nach eine Parabel ist, und nachdem wir auch die Lage ihrer Axen gegen unsere Coordinaten in dem vorigen Paragraphe festgestellt haben, so wollen wir nun in diesem Paragraphe die Gleichung dieser Zonenlinie auf unser angenommenes Axensystem Oxy Fig. 2 beziehen, um so die allgemeinste Gleichung derselben zu erhalten.

Es seien also zu diesem Behufe $a_{/} : b_{/} : c_{/} = 1 : m_{/}b : n_{/}c$ und $a_{//} : b_{//} : c_{//} = 1 : m_{//}b : n_{//}c$ die Axenverhältnisse der unsere Zone bestimmenden Flächen, so ist, da:

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot (x - x'')$$

oder auf die gewöhnliche Form der Gleichung einer geraden Linie $= ax + b$ gebracht

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} x + \frac{y'' x' - y' x''}{x' - x''}$$

die Gleichung einer durch zwei Punkte x', y' und x'', y'' gehenden Geraden ist, jene

$$y = \frac{(n_{//} - n_{/})\, m_{/}\, m_{//}\, b}{(m_{//} - m_{/})\, n_{/}\, n_{//}\, c} x + \frac{n_{/}\, m_{//} - n_{//}\, m_{/}}{(m_{//} - m_{/})\, n_{/}\, n_{//}\, c} \qquad \text{(Gl. 1)}$$

die Gleichung der Neumann'schen Zonenlinie, denn sie geht ja durch die Punkte:

$$M' \begin{cases} x_{,} = \dfrac{1}{m_{,} b}, \\ y_{,} = \dfrac{1}{n_{,} c}, \end{cases} \qquad M'' \begin{cases} x_{,,} = \dfrac{1}{m_{,,} b}, \\ y_{,,} = \dfrac{1}{n_{,,} c}. \end{cases}$$

Der Winkel α, den diese Neumann'sche Zonenlinie BC Fig. 4 mit der Abscissenaxe Ox bildet, ist bekanntlich:

$$tang\ \alpha = a = \frac{(n_{,,} - n_{,})\, m_{,} m_{,,} b}{(m_{,,} - m_{,})\, n_{,} n_{,,} c}$$

und hieraus erhält man nun ganz einfach die beiden folgenden Werthe für $sin\ \alpha$ und $cos\ \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} sin\ \alpha &= \frac{(n_{,,} - n_{,})\, m_{,} m_{,,} b}{\sqrt{(m_{,,} - m_{,})^2 n_{,}^2 n_{,,}^2 c^2 + (n_{,,} - n_{,})^2 m_{,}^2 m_{,,}^2 b^2}} \\ cos\ \alpha &= \frac{(m_{,,} - m_{,})\, n_{,} n_{,,} c}{\sqrt{(m_{,,} - m_{,})^2 n_{,}^2 n_{,,}^2 c^2 + (n_{,,} - n_{,})^2 m_{,}^2 m_{,,}^2 b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(Gl. 3)}$$

In Fig. 4 ist $O\,x\,y$ jenes Coordinatenaxen-System, auf welches wir unsere Zonenlinie MPP' beziehen wollen, welche Zonenlinie, bezogen auf das Coordinaten-System $M x' y'$, die bekannte Gleichung

$$x_1{}^2 = \mu\, y_1 \qquad \text{(Gl. 4)}$$

hat, wenn wir die Axe der Parabel (was gewöhnlich nicht geschieht, sich hier aber als zweckmässiger erweist) als die Axe der y_1 bezeichnen. Wir werden unsere Aufgabe also gelöst haben, wenn wir unsere Zonenlinie auf das neue Axensystem $O\,x\,y$ bezogen werden haben.

Wenn man von irgend einem rechtwinkligen Coordinaten-System auf ein anderes rechtwinkliges Coordinaten-System übergeht, so hat man, wenn x_1 und y_1 die Coordinaten in Bezug auf das alte Axensystem, jene x und y die Coordinaten in Bezug auf das neue Axensystem und d und δ die Coordinaten des neuen Coordinaten-Mittelpunktes sind, hierzu folgende bekannte Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= d + x \,.\, cos\,(x \,.\, x^1) + \ y\ sin\,(x \,.\, x_1) \\ y^1 &= \delta + x\ sin\ \ (x \,.\, x^1) + y \,.\, cos\,(x \,.\, x_1). \end{aligned}$$

Es handelt sich nämlich nur um die Bestimmung von $d \,.\, \delta$, cos $(x \,.\, x_1)$. Die Grösse d ist offenbar $= 0$ und δ ist $= u$. u ist aber

die Entfernung des Coordinaten-Mittelpunktes O von der Geraden $M' M''$, welches bekanntlich ist

$$u = P = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

und wenn man statt a und b die ihnen entsprechenden Werthe aus der Gleichung 1 setzt, folgt:

$$u = \frac{n_, m_{,,} - m_, n_{,,}}{\sqrt{(m_, - m_{,,})^2 n_,^2 n_{,,}^2 c^2 + (n_{,,} - n_,)^2 m_,^2 m_{,,}^2 b^2}}, \qquad \text{(Gl. 5)}$$

der Winkel $(x \,.\, x_1)$, d. i. die Neigung der Richtungen der Coordinaten x beider Systeme ist aber, wie aus der hieher gehörigen Figur zu ersehen ist $= \alpha$, also ist:

$$\sin(x \,.\, x_1) = \sin\alpha\,;\; \cos(x \,.\, x_1) = \cos\alpha.$$

Es unterliegt nun keiner Schwierigkeit mehr, x_1 durch diese Grössen auszudrücken. Setzt man nun der Kürze halber $u = \frac{\lambda}{D}$, $\cos\alpha = \frac{v}{D}$ und $\sin\alpha = \frac{t}{D}$, so ist:

$$x_1 = x \,.\, \frac{v}{D} + y \,.\, \frac{t}{D}$$

$$y_1 = \frac{\lambda}{D} + x \,.\, \frac{t}{D} + y \,.\, \frac{v}{D}$$

und diese Werthe in unsere obige Gleichung 1 gesetzt, erhält man:

$$\frac{(x \,.\, v + x \,.\, t)^2}{D^2} = \frac{\lambda^2 + x \,.\, t \,.\, \lambda + y \,.\, v \,.\, \lambda}{D^2}$$

oder da sich durch D^2 abkürzen lässt:

$$(x \,.\, v + y\, t)^2 = \lambda^2 + x \,.\, t \,.\, \lambda + y \,.\, v\,\lambda$$

als unsere gesuchte, allgemeine Gleichung.

In diese Gleichung hat man nun folgende Werthe zu setzen:

$$\lambda = (n_, m_{,,} - m_, n_{,,})$$
$$v = (m_{,,} - m_,)\, n_, n_{,,}\, c$$
$$t = (n_{,,} - n_,)\, m_, m_{,,}\, b$$

um die durch $m_,$, $m_{,,}$, $n_,$ und $n_{,,}$ bestimmte Gleichung der Zonenlinie zu erhalten, sie ist:

$$((m_{,,} - m)\, n_, n_{,,}\, cx + (n_, - n_{,,})\, m_, m_{,,}\, by)^2 = (n_, m_{,,} - m_, n_{,,}) \,.$$
$$.\, ((n_, m_{,,} - m_, n_{,,}) + (n_{,,} - n_,)\, m_, m_{,,}\, bx + (m_{,,} - m_,)\, n_, n_{,,}\, cy).$$

Mittelst dieser Gleichung ist es nun ein leichtes, das y zu bestimmen, wenn x gegeben ist, und umgekehrt. Wir können diese Bestimmung hier füglich übergehen.

§. 4.

Wir haben in dem vorigen Paragraphe gesehen, wie wir die Zonenlinie analytisch bestimmen, wenn zwei sie bestimmende Krystallflächen gegeben. Wir wollen nun hier sehen, wie wir im gleichen Falle diese Zonenlinie graphisch construiren.

Es seien also $B' C'$ und $B'' C''$ die Flächenorte jener zwei Krystallflächen, welche die Zonenlinie bestimmen, so ziehen wir nun vom Coordinaten - Mittelpunkte O auf jeden dieser Flächenorte ein Perpendikel OD' und OD''. Der Durchschnitt D' und D'' des Perpendikels mit seinem entsprechenden Flächenorte gibt dann den Neumann'schen Flächenort und die durch D' und D'' gezogene Linie ist nichts anderes als die Neumann'sche Zonenlinie, welche unseren beiden gegebenen Flächen entspricht. Auf diese Neumann'sche Zonenlinie ziehen wir nun ebenfalls vom Coordinaten-Mittelpunkt O ein Perpendikel, welches dieselbe in dem Punkte A treffen möge. So ist dann A der Scheitelpunkt unserer zu bestimmenden Parabel, AO die Richtung ihrer Axe, O der Brennpunkt derselben und also OA der vierte Theil des Parameters. Mittelst dieser gegebenen Daten ist es nun keiner Schwierigkeit mehr unterlegen, die Parabel selbst nach irgend einer Constructions-Methode zu construiren.

Der Flächenort einer jeden, in die Zone der beiden gegebenen Flächen gehörigen Fläche muss aber an die nach obigem construirte Parabel tangiren. Es ist dies also auch die graphische Probe, ob eine Fläche in der Zone zweier anderen liegt. Die analytische Gleichung, welche die Bedingung ausdrückt, dass die Fläche $a : b : c = = 1 : mb : nc$ in der Zone der beiden Flächen $a_{,} : b_{,} : c_{,} := 1\ m_{,}b : : n_{,}c$ und $a_{,,} : b_{,,} : c_{,,} = 1 : m_{,,}b : n_{,,}c$ ist:

$$\frac{M}{m} + \frac{N}{n} = P$$

wobei:

$$M = \frac{n_{,} - n_{,,}}{n_{,} n_{,,}}$$

$$N = \frac{m_{,,} - m_{,}}{m_{,} m_{,,}}$$

$$P = \frac{m_{,,} n_{,} - n_{,} m_{,,}}{n_{,} n_{,,} m_{,} m_{,,}}$$

zu setzen ist.

§. 5.

Wenn eine Fläche in zwei Zonen liegt, wenn sie also durch diese beiden Zonen bestimmt ist, so muss ihr Flächenort an die beiden, die Zonen repräsentirenden Parabeln tangiren. Es ist also die Aufgabe zu lösen, an zwei gegebene Parabeln eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Es seien also AVW und $A'V'W'$ Fig. 6, die die beiden Zonen repräsentirenden Parabeln, so werden wir unsere Aufgabe am einfachsten auf folgende Art lösen: Wir verbinden beide Scheiteln der Parabeln (erhalten hierdurch die Richtungen der Axen derselben) mit dem Coordinaten-Mittelpunkte O und errichten in den Scheitelpunkten A und A' auf die Axenrichtungen AO und $A'O$ senkrechte Linien BC und $B'C'$, welche aber nichts anderes sind, als die Neumann'schen Zonenlinien. Diese beiden Linien schneiden sich nun in einem gewissen Punkt M, der somit der Neumann'sche Flächenort der zu bestimmenden Fläche ist, und die durch den Punkt M auf die MO senkrecht gezogene Linie mn ist somit der Flächenort unserer zu bestimmenden Flächen. Dass die so erhaltene Linie an beide Parabeln tangirt, bedarf wohl keines weiteren Beweises, indem sie den im §. 2 gestellten Bedingungen beider Zonenlinien entspricht.

Aber der Bedingung entsprechend, dass eine Fläche in zwei Zonen liegt, kann ihre Bestimmung nicht nur wie es hier geschehen ist, graphisch, sondern sie kann auch analytisch gemacht werden. Bestimmen nämlich die Gestalten $a^1 : b^1 : c^1 = m^1 a : n^1 b : p^1 c$ und $a_1 : b_1 : c_1 = m_1 a : n_1 b : p_1 c$ die eine Zone, jene $a'' : b'' : c'' = m'' a : n'' b : p'' c$ und $a'' : b'' : c'' = m'' a : n'' b : p'' c$ die zweite Zone, so ist die durch beide Zonen bestimmte Fläche $a_0 : b_0 : c_0 = m_0 a : n_0 b ; p_0 c$ durch folgende Gleichungen zu berechnen:

$$m_0 = PN' - P'N$$
$$n_0 = MP' - PM'$$
$$p_0 = MN' - NM'$$

in welchen Werthen M, N, P, M', N' und P' folgende Werthe haben:

$$M = -\frac{p''n' - n''p'}{n'n''p'p''} \qquad M' = -\frac{p_{,,}n_{,} - n_{,,}p_{,}}{n_{,}n_{,,}p_{,}p_{,,}}$$

$$N = -\frac{m''p' - m'p''}{m'm''p'p''} \qquad N' = -\frac{m_{,,}p_{,} - m_{,}p_{,,}}{m_{,}m_{,,}p_{,}p_{,,}}$$

$$P = \frac{m''n' - n''m'}{m'm''n'n''} \qquad P' = \frac{m_{,,}n_{,} - n_{,,}m_{,}}{m_{,}m_{,,}n_{,}n_{,,}}.$$

§. 6.

Wir übergehen nun auf die Aufgabe: den Flächenort einer Fläche zu bestimmen, die in einer gegebenen Zone liegt und in einem gegebenen Punkte an die Zonenlinie tangirt. Es sei zu diesem Behufe AVV' jene Zonenlinie, an welche der zu bestimmende Flächenort in dem gegebenen Punkte M tangirt. Es sei nun F Fig. 7 der Brennpunkt der Parabel AVV', also ist auch $AF = \frac{1}{4}p$. Wir verbinden den Punkt M mit dem Punkte F, halbiren die MF in G und ziehen durch G eine Linie GH parallel zur Axe AF der Parabel. Der Punkt H, der Durchschnittspunkt der GH mit der durch den Punkt A auf die Axe der Parabel senkrecht gezogenen Linie AR, mit dem gegebenen Punkte M verbunden, gibt den gesuchten Flächenort MH. Dies ist aber nur dann richtig, wenn der durch F, H und M gezogene Kreis die AR tangirt, oder was dasselbe ist, wenn $GH = FH$ ist. Um dies zu beweisen, so sei der Punkt M gegeben durch seine Coordinaten:

$$x_{\prime\prime} = x_{\prime\prime}\,;\; y'' = \sqrt{p x''}$$

in welchem p den Parameter unserer Zonenlinie AVV' bedeutet. Der Punkt F sei gegeben durch seine Coordinaten:

$$x' = \tfrac{1}{4}p\,;\; y' = 0,$$

demnach sind die Coordinaten des Punktes G folgende:

$$x_0 = AQ = \frac{x_\prime + x_{\prime\prime}}{2} = \frac{p + 4x_{\prime\prime}}{8}$$

$$y_0 = GQ = \frac{y_\prime + y_{\prime\prime}}{2} = \frac{\sqrt{p x_{\prime\prime}}}{2}\,.$$

Aus der hierher gehörigen Fig. 7 folgt aber $GH = AQ$, folglich ist auch:

$$GH = \frac{p + 4x_{\prime\prime}}{8}\,. \qquad \text{(Gl. 1)}$$

Aus derselben Figur ersieht man aber auch, dass

$$FG = \sqrt{\overline{GQ}^2 + \overline{FQ}^2}$$

ist, und da $GQ = \frac{1}{2}\sqrt{a x_{\prime\prime}}$ und $QF = AQ - AF$ ist, so erhält man auch:

$$FG = \sqrt{\frac{px_{\prime\prime}}{4} + \left(\frac{p+4x_{\prime\prime}}{8} - \frac{p}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\,x_{\prime\prime}^2 + 8\,p\,x_{\prime\prime} + p^2}{64}}$$

oder:

$$FG = \frac{p+4x_{\prime\prime}}{8} \qquad \text{(Gl. 2)}$$

welche Gleichung aber mit Gleichung 1 vollkommen übereinstimmend ist, es ist somit:

$$FG = HG$$

somit unsere obige Bestimmung der Tangente vollkommen gerechtfertigt.

Wenn man MP vertiacl auf die Axe AP zieht, und HG bis L verlängert, so ist offenbar $ML - LP = AH$. Man hat also, um den Flächenort in diesem Falle zu bestimmen, d. h. in einem bestimmten Punkt M an die Parabel eine Tangente zu ziehen, folgende einfache Regel: Man halbire die betreffende Ordinate y, ziehe durch den so erhaltenen Halbirungspunkt L eine Parallele zur Axe der x, wo diese Linie die durch den Scheitelpunkt auf die Axe senkrecht gezogene Linie trifft, ist ein zweiter Punkt der Tangente, und dieser mit dem gegebenen Punkte M verbunden gibt diese Tangente selbst. Dass der so erhaltene Flächenort der Zone selbst angehört, ergibt sich schon daraus, dass der Winkel MHF ein Rechter ist, also dem §. 2 entspricht.

Um jenen Punkt zu finden, in welchen ein gegebener Flächenort an eine gegebene Zonenlinie tangirt, hat man folgende einfache Construction. Man bestimmt den Durchschnittspunkt H des Flächenortes MH Fig. 7 mit der durch den Scheitelpunkt auf die Axe senkrecht gezogenen Linie AK, macht das Stück KH dem Stücke AH gleich und zieht durch K eine Parallele KM zur Axe AP der Parabel. Jener Punkt, in welchen die durch K zur Axe parallel gezogene Linie KM unseren Flächenort MH schneidet, ist der gesuchte Tangirungspunkt. Denn es ist immer $HA = KA = \frac{\sqrt{ax_{\prime\prime}}}{2}$ also $AK = \sqrt{ax''} = AP$, offenbar sowohl ein Punkt der geraden Linie MH, als ein Punkt der Parabel AVV' und da der Flächenort MH die Parabel (der Voraussetzung gemäss) nur tangiren kann, so kann der Punkt M auch nur der Tangirungspunkt sein, welchen wir zu bestimmen uns vorgenommen haben.

§. 7.

Wir wollen nun auf die Bestimmung und die Lage der Flächenorte einiger Grenzgestalten unser Augenmerk richten und zwar vorerst auf jene des orthotypen Krystallsystems.

Die Fläche $P-\infty$ ist eine unserer Projectionsebene parallele Ebene, jene Ebene, die also ihren Flächenort bestimmt, ist somit eine verticale Ebene, und da nicht genug Bestimmungsstücke vorhanden sind (denn es fehlt die Richtung des Durchschnittes der geraden Endfläche mit der Projectionsebene), so ist auch die Lage des Flächenortes von $P-\infty$ nicht vollkommen bestimmt, sondern so viel ist nur gewiss, dass ihr Flächenort durch den Mittelpunkt unseres Coordinaten-Systems geht. Jede durch den Coordinaten-Mittelpunkt gezogene gerade Linie ist also, als der Flächenort der geraden Endfläche $P-\infty$ anzusehen.

Die verticalen Prismen $(\breve{P}+\infty)^m$, deren Flächen vertical sind, und welche mit unserer Projectionsebene (wenn sie selbst durch den Mittelpunkt unseres Krystallaxen-Systemes gehen) gerade Linien, als Schritte haben, welche durch den Coordinaten-Mittelpunkt gehen, wie z. B. AB in Fig. 8, haben ihren Flächenort von O aus in unendlicher Entfernung, er ist aber immer dem Schnitte der Prismenfläche mit der Projectionsebene parallel. Somit ist die auf AB senkrecht gezogene CD auch senkrecht auf dem der AB entsprechenden Prismenflächenort.

Ebenso sind auch die Flächenorte von $\breve{P}r+\infty$ und $\bar{P}r+\infty$ von O aus in unendlicher Entfernung, aber senkrecht stehend auf der respectiven Axenrichtung.

Die Flächenorte der horizontalen Prismen sind gerade Linien, welche senkrecht stehen auf den respectiven Axenrichtungen der b und c und sich von da aus in endlicher Entfernung befinden, welche, wenn z. B. das Zeichen einer solchen Grenzgestalt $a_1 : b_1 : c_1 = a : mb : \infty c$, die Grösse $\frac{a}{mb}$ hat. Die Linien 1 . 1 . 1 . . . sind die Flächenorte solcher horizontaler Prismen, die zur grössern, und jene 2 . 2 . 2 . . solche, die zur kleinern Diagonale gehören.

Auf eine ähnliche Art, wie sich die Flächenorte der Gestalten des orthotypen Krystallsystems im Schema gegen einander verhalten, verhalten sich auch die Gestalten des rhomboëdrischen Krystall-

systems. Die Flächenorte der Rhomboëder stehen senkrecht auf den Axenrichtungen I, I, I; jene der gleichartigen sechsseitigen Pyramiden stehen senkrecht auf den Axenrichtungen II, II, II, indem sie immer durch ihren entsprechenden Neumann'schen Flächenort gehen.

Der Flächenort des verticalen sechsseitigen Prisma's $R+\infty$ liegt von O aus in unendlicher Entfernung, steht aber senkrecht auf der Axenrichtung OI. Ebenso ist jener von $P+\infty$ aus von O in unendlicher Entfernung, steht aber senkrecht auf der Axenrichtung $O\,II$. Der Flächenort von $R-\infty$ ist wieder jede durch O gehende gerade Linie. Die Flächenorte der Skalenoëder bekommt man wieder dadurch, dass man den Neumann'schen Flächenort mit dem Coordinaten-Mittelpunkte verbindet, und durch denselben eine Senkrechte auf diese Verbindungslinie zieht. Die Flächenorte der verticalen ungleichkantigen zwölfseitigen Prismen ergeben sich wieder von O aus in unendlicher Entfernung, aber parallel mit jenen Skalenoëder-Flächenorten, mit denen sie eine gleiche Ableitungszahl haben.

§. 8.

Wir wollen nun auch hier wieder einige specielle Lagen der Zonenlinie näher betrachten. Wenn man die Zonenlinie construiren soll, welche der Zone irgend einer Gestalt $(\breve{\breve{P}}+n)^m$ mit den geraden Endflächen entspricht, so wird man sich vorerst den Flächenort $(\breve{\breve{P}}+n)^m$ construiren, dann von O aus auf denselben eine senkrechte Linie ziehen, den Durchschnittspunkt dieser beiden Linien, als den Neumann'schen Flächenort von $(\breve{\breve{P}}+n)^m$ mit den Coordinaten-Mittelpunkt, als den Neumann'schen Flächenort von $P-\infty$, verbinden und durch O auf diese so erhaltene Neumann'sche Zonenlinie eine senkrechte Linie ziehen, welche nichts anders ist als die Axe unserer Zonenlinie, welche, wie leicht einzusehen, in diesem Falle eine Parabel vom Parameter $p=O$ ist, somit in eine durch O gehende gerade Linie übergeht. Jede in dieser Zone liegende Fläche hat also einen solchen Flächenort, der parallel geht mit dem gegebenen Flächenort von $(\breve{\breve{P}}+n)^m$.

Ist die Zonenlinie zu construiren, welche der Combination $(\breve{\breve{P}}+n)^m . (\breve{\breve{P}}+\infty)^{m'}$ entspricht, so bestimmt man sich den Flächenort von $(\breve{P}+n)^m$, zieht von O aus auf diesen Flächenort eine senkrechte Linie und erhält so den Neumann'schen Flächenort, von

diesen zieht man auf die Richtung des Flächenortes von $(\breve{P}+\infty)^m$ eine senkrechte Linie, welche dann offenbar durch den Neumann-schen Flächenort von $(\breve{P}+\infty)^{m'}$ geht, und erhält so die Neumann'sche Zonenlinie dieser Combination, auf diese zieht man von O aus eine Senkrechte und erhält hierdurch nicht nur den Parameter der Parabel, sondern auch die Axenrichtung derselben. Die Axe der hierher gehörigen Zonenlinie geht also parallel zum Flächenorte des verticalen Prisma's.

Desshalb ist auch die Axe der Zonenlinie der Combination $(\breve{P}r+n) \, . \, \bar{P}r+\infty$. parallel mit der grössten Diagonale und jene der Combination $(\bar{P}r+n) \, . \, \breve{P}r+\infty$. parallel mit der kleineren Diagonale der Basis der Grundgestalt. Der Parameter dieser Parabel ist dann immer die vierfache Entfernung des Flächenortes des horizontalen Prisma's von dem Coordinaten-Mittelpunkte.

Ganz dasselbe Verhältniss der Zone, wie wir sie hier vorzugsweise am orthotypen Krystallsysteme betrachtet haben, findet auch mit einigen unwesentlichen Abänderungen am rhomboëdrischen Krystallsysteme Statt, wir können also die näheren Betrachtungen derselben hier füglich übergehen und sie der eigenen Betrachtung des Lesers überlassen.

§. 9.

Wir haben bis jetzt gesehen, wie sich die Zonenlinien gegen einander verhalten, wenn das Krystallsystem von solcher Beschaffenheit ist, dass die Hauptaxe senkrecht auf der Ebene der Nebenaxe steht, denn wie sich diese Verhältnisse beim orthotypen und rhomboëdrischen Systeme gestalten, so sind sie auch beim hexaëdrischen und beim pyramidalen Systeme. Nun wollen wir unser Hauptaugenmerk auf die Zonenverhältnisse jener Krystallsysteme richten, bei denen die Hauptaxe geneigt ist gegen die Ebene der Nebenaxen, und dies vorzugsweise bei jenem Systeme thun, bei welchem die Hauptaxe in einer Ebene der Nebenaxe geneigt ist, nämlich bei dem hemiorthotypen Krystallsysteme, weil die Verhältnisse der beiden anderen Systeme diesem ganz analog sind.

Um die Flächenorte der Gestalten des hemiorthotypen Krystallsystems zu erhalten, denken wir nun jede Fläche durch die Spitze des Grund-Hemiorthotypes gelegt, von dieser Spitze auf die Basis ein Perpendikel gefällt, welches die grössere oder kleinere Diagonale trifft, je nachdem die Abweichung der Hauptaxe in der Ebene der

grösseren oder kleineren Diagonale stattfindet, und von dem Fusspunkte des Perpendikels auf die Ebene selbst eine verticale Ebene gelegt, von der Beschaffenheit, dass sie parallel ist mit dem Durchschnitte der Ebene der Gestalt selbst mit der Basis. Wir erhalten also auch hier wieder auf unserer Projections-Ebene den gesuchten Flächenort, welcher parallel ist mit dem Schnitte der Ebene selbst und der Projections-Ebene und durch den Neumann'schen Flächenort geht. Wir können nun nicht mehr die Projection des Krystallaxensystem-Mittelpunktes als unseren Coordinaten-Mittelpunkt ansehen, wir müssen zu diesem die Projection des Fusspunktes vom Perpendikel wählen, und erhalten also zu unseren Coordinaten-Axen die eine Diagonale, in welcher die Abweichung stattfindet, selbst, und zur zweiten eine durch unseren neuen Coordinaten-Mittelpunkt gezogene Parallele zur zweiten Diagonale der Basis unserer Grundgestalt. Auf diese beiden neuen Axen müssen auch sämmtliche Krystallflächen bezogen werden, um leicht den Neumann'schen Flächenort zu erhalten. Man hat dann nur wieder den Neumann'schen Flächenort mit dem Coordinaten-Mittelpunkte zu verbinden, und auf diese Verbindungslinie durch den genannten Flächenort eine Senkrechte zu fällen, um unseren Flächenort zu erhalten. Die Zonenlinien sind dann wieder Parabeln, deren Brennpunkt in dem als Coordinaten-Mittelpunkt angenommenen Fusspunkte des Perpendikels liegt, deren Axenrichtung senkrecht auf der Neumann'schen Zonenlinie steht, und deren Parameter gleich der vierfachen Entfernung des Coordinaten-Mittelpunktes von der Neumann'schen Zonenlinie ist. In dem Verhältniss der Zonen findet also auch hier wieder die Übereinstimmung mit jenen der geradaxigen Systeme Statt, wie wir dies bei der „graphischen Kreis-Methode“ gesehen haben.

Die Entwerfung des Schema's für die beiden anderen schiefaxigen Systeme geschieht ganz ähnlich, wie beim hemiorthotypen Krystallsysteme. Man nimmt den Fusspunkt des Perpendikels als Coordinaten-Mittelpunkt und legt durch denselben ein rechtwinkliges Coordinaten-System, deren Axen beim hemiorthotypen Krystallsystem beide den Diagonalen der Basis parallel sind, von denen jedoch nur eine Axe eine Diagonale der Basis beim anorthotypen Krystallsysteme parallel ist. Auf dieses Axensystem bezieht man nun alle Flächen, kann somit leicht den Neumann'schen Flächenort bestimmen und dann ist es ein Leichtes, unseren Flächenort gehörig zu bestimmen.

§. 10.

Zur Anwendung dieser Methode wollen wir hier das Schema des prismatischen Topases (triviel: Topas genannt) entwerfen.

Die Grundgestalt des prismatischen Topases hat folgende Abmessungen:

$$P = 141^{\circ}\,7';\ 101^{\circ}\,52';\ 90^{\circ}\,55'$$
$$a:b:c = 1:\sqrt{4\cdot440}:\sqrt{1\cdot328}.$$

Die wichtigsten und im Schema Fig. 10 dargestellten einfachen Gestalten sind:

$P-\infty$	$= a:\infty b:\infty c$	$P-1$	$= \frac{1}{2}a: b: c$
$\frac{4}{3}P-1$	$= \frac{2}{3}a: b: c$	P	$= a: b: c$
$P+1$	$= 2a: b: c$	$P+\infty$	$= \infty a: b: c$
$(\frac{4}{3}\breve{P}-1)^2$	$= \frac{4}{3}a: 2b: c$	$(\breve{P}+\infty)^2$	$= \infty a: 2b: c$
$(\breve{P}+\infty)^{\frac{3}{2}}$	$= \infty a: \frac{3}{2}b: c$	$(\breve{P}+\infty)^3$	$= \infty a: 3b: c$
$\breve{P}r+1$	$= 2a: b:\infty c$	$\breve{P}r+2$	$= 4a: b:\infty c$
$\breve{P}r+\infty$	$= \infty a: b:\infty c$	$\bar{P}r+1$	$= 2a:\infty b: c$
$\bar{P}r+\infty$	$= \infty a:\infty b: c$	$\bar{P}r$	$= a: b:\infty c$

Ausser diesen Gestalten sind noch mehrere andere im Schema dargestellt und können, da sie dort mit ihren Mohs'schen Zeichen bezeichnet sind, leicht herausgelesen werden. Die Zonenlinien sind im Schema punktirt und die Tangirungspunkte mit Ringelchen bezeichnet, um desto augenfälliger zu sein.

Über das weitere Verhalten der Zonen und der Flächenorte ist hier wohl wenig mehr zu sagen. Jene Flächenorte, die horizontale Combinationskanten hervorbringen, sind in unserem Schema immer parallel. In Bezug auf die Zonenlinien macht man die Bemerkung, dass je mehr sie sich vom Coordinaten-Mittelpunkte entfernen, desto grösser wird ihr Krümmungshalbmesser am Scheitelpunkte, desto flächer wird also die Parabel selbst, und wenn einerseits ihr Krümmungshalbmesser $= O$ ist, so wird er andererseits unendlich gross. Ebenso kann man aus dem Schema ersehen, dass alle Orthotype, welche mittelst derselben Ableitungszahl nach derselben Diagonale abgeleitet sind (wenn auch ihr Nebenreihen-Coëfficient gleich gross ist), parallele Flächenorte haben, dass sie also horizontale Combinationskanten hervorbringen. In jeder Zone liegt ein verticales Prisma, dessen Flächenort parallel mit der (die Zone repräsentirenden Parabel-) Axe ist, so leicht im Schema construirt werden kann. Ebenso kann

auch leicht der Flächenort jenes horizontalen Prisma's gefunden werden, welches in einer gewissen Zone liegt, man braucht nur an die betreffende Parabel eine Tangente parallel der einen oder der anderen Coordinaten-Axe zu ziehen. Aus dem Schema ist es auch hier wieder zu ersehen, dass die Fläche eines jeden Orthotypes zugleich in zwei Zonen liegt, von denen die eine bestimmt ist durch die Combination $\breve{P}r+n\,.\,\bar{P}r+\infty$ und die andere bestimmt ist durch die Combination $\bar{P}r+n\,.\,\breve{P}r+\infty$, denn im Schema tangirt der Flächenort von $P+n$ an die diese Combination darstellenden Parabeln.

Die weiteren Zonenverhältnisse ergeben sich von selbst beim Anblick von unserem Schema; wir übergehen sie also hier.

Dies sind die wichtigsten Grundzüge der „graphischen Parabel-Methode". Alle jene Anforderungen, welche man an eine graphische Methode stellen kann, erfüllt sie treulich, wenn wir hier auch nicht von allen ausführlich entsprochen haben. So unterliegt es z. B. keiner Schwierigkeit, aus dem Schema die Neigungen in den Zonen herauszulesen oder den ebenen Winkel zu bestimmen, den zwei durch den Durchschnitt von drei Krystallflächen entstandene Krystallkanten mit einander hervorbringen, man bestimmt sich nämlich von allen diesen Flächen die Neumann'schen Flächenörter, wie wir dies so oft gethan, und geht dann genau so vor, wie es Neumann selbst in seinen „Beiträgen zur Krystallonomie," 1. Heft, Berlin und Posen 1823, gezeigt hat, kann somit keinen weiteren Schwierigkeiten mehr unterliegen.